プロファンクターオプティクスの理論と実装

February 7, 2023

目的

データへのアクセサの一般化である Lens やキャストの一般化である Prism は更に Optics という概念へと一般化される。

これらの一般化には圏論が用いられるが、興味深いことに圏論は自身を抽象化できる。そのため Optic も更に一般化できると考えた。

全体の構成

- 最初に導入として比較的身近な Lens と Prism を紹介し、Optic を定義して Optic がそれらの一般化であることを示す。
- 次に丹原加群を定義して、Optic との関係性を丹原 Double 圏同値として示す。
- そして最後にこれらの主要な結果として、Optic の別の形態を与えるプロファンクターの表現定理を述べる。

データアクセサの一般化 Lens

Definition (Lens)

Lens は以下の二つの写像で構成される。

$$\mathrm{get} : S \to A,\ \ \mathrm{set} : S \times A' \to S'$$

ここで $S := B \times A,\ \ S' := B \times A'$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{get} : S &\longrightarrow A & \mathrm{set} : S \times A' &\longrightarrow S' \\ \langle b, a \rangle &\longmapsto a & \langle \langle b, a \rangle, a' \rangle &\longmapsto \langle b, a' \rangle \end{aligned}$$

またこのような二つの写像の組の全体を $\mathrm{Lens}(A, A', S, S')$ とする。すなわち

$$\mathrm{Lens}(A, A', S, S') := [S, A] \times [S \times A', S']$$

となる。($[A, B]$ は集合 A から B への写像の集合とする。)

キャストの一般化 Prism

Definition (Prism)

Prism は以下の二つの射で構成される。

$$\text{downcast} : S \to S' + A,\ \ \text{upcast} : A' \to S'$$

ここで $S := B + A,\ S' := B + A'$ とすると、

$$\begin{aligned} \text{downcast} : S &\longrightarrow S' + A & \text{upcast} : A' &\longrightarrow S' \\ a &\longmapsto a & a' &\longmapsto a' \\ b &\longmapsto b & & \end{aligned}$$

Lens と同様に

$$\text{Prism}(A, A', S, S') := [S, S' + A] \times [A', S]$$

とする。

Optic の定義

Definition (Optic)

四つの集合 A, A', S, S' に対する Optic の集合を

$$\mathrm{Optic}(A, A', S, S') := \int^{M} [S, M \otimes A] \times [M \otimes A', S']$$

と定義する。

モノイダル積 $\otimes$ 直積 $\times$、直和 $+$ の一般化で集合のみならず写像のモノイダル積も取ることができる。つまり二つの写像 $f : A \to B,\ g : C \to D$ を合成した写像

$$f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D$$

が得られる。

コエンド $\int^{M}$ 対象を添字とする直和集合

Lens は Optic である

写像 $\langle \mathrm{get}, \mathrm{id} \rangle : S \to S \times A$ を

$$\langle \mathrm{get}, \mathrm{id} \rangle (s) = \langle \mathrm{get}(s), s \rangle$$

と定義する。
すると、$\langle \langle \mathrm{get}, \mathrm{id} \rangle, \mathrm{set} \rangle \in [S, S \times A] \times [S \times A', S']$ となるから

$$\langle \langle \mathrm{get}, \mathrm{id} \rangle, \mathrm{set} \rangle \in \int^{M} [S, M \times A] \times [M \times A', S']$$

である。これによって Lens が Optic の一種であることが分かる。

また Prism の場合も同様に、写像 $\langle \mathrm{upcast}, \mathrm{id} \rangle : A' + S' \to S'$ を構成すれば簡単に示せる。

集合の圏

集合と写像の全体は圏と呼ばれる構造を持ち、これを $\mathbb{Set}$ とする。

Definition (集合の圏)

- **対象** 任意の (小さい) 集合を $\mathbb{Set}$ の対象とする。
- **射** 対象 A, B に対する射を任意の写像 $f : A \to B$ とする。
- **射の合成** 射の合成 $f \circ g$ はそのまま写像の合成とする。

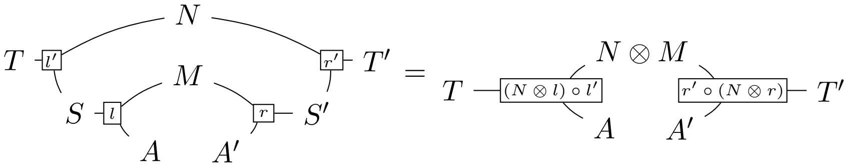
写像の集合は $[A, B]$ で表せるが、これを Optic の集合 $\mathrm{Optic}(A, A', S, S')$ と置くと同様に圏が定義できる。

Optic の圏

Definition (Optic の圏)

集合の圏上の Optic の圏を以下のように構成する。

- **対象** 任意の (小さい) 集合の二つ組を対象とする。
- **射** 対象 $(A, A'),\ (S, S')$ による射集合を $\mathrm{Optic}(A, A', S, S')$ とする。
- **射の合成** 二つの Optic $\langle l', r' \rangle,\ \langle l, r \rangle$ の合成を $\langle (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \rangle$ とする。



また Optic の合成が定義できるので、Lens、Prism でも合成ができる。

丹原加群

Definition (丹原加群)

丹原加群とは以下の図式を可換にするプロファンクター P と射の族

$$\zeta_{A,A',M} : P(A,A') \to P(M \otimes A, M \otimes A')$$

の組 (P,ζ) である。

$$\begin{tikzcd}
P(A,A') \arrow[rr, "\zeta_{A,A',M}"] \arrow[d, "\zeta_{A,A',N\otimes M}"] & & P(M\otimes A, M\otimes A') \arrow[d, "\zeta_{A,A',N}"] \\
P((N\otimes M)\otimes A, (N\otimes M)\otimes A') \arrow[rr, "P(a^{-1}, a)"] & & P(N\otimes(M\otimes A), N\otimes(M\otimes A'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P(A,A') \arrow[r, "\zeta_I"] \arrow[dr] & P(I\otimes A, I\otimes A') \arrow[d, "P(\lambda^{-1}, \lambda)"] \\
 & P
\end{tikzcd}$$

ただし、プロファンクターは圏上の二項演算の一種である。

丹原加群の圏

Definition (丹原加群の圏)

丹原加群の圏 $\mathbb{T}\mathrm{amb}$ を以下のように定義する。

対象 任意の丹原加群 (P, ζ) を対象とする。

射 以下の図式を可換にする射の族 $\alpha_{A,A'} : P(A, A') \to Q(A, A')$ を射とする。

$$\mathbb{S}\mathrm{et} \qquad\qquad \mathbb{T}\mathrm{amb}$$

$$\begin{tikzcd}
P(A, A') \arrow[r, "\zeta_{A,A',M}"] \arrow[d, "\alpha_{A,A'}"] & P(M \otimes A, M \otimes A') \arrow[d, "\alpha_{M \otimes A, M \otimes A'}"] \\
Q(A, A') \arrow[r, "\mu_{A,A',M}"] & Q(M \otimes A, M \otimes A')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(P, \zeta) \arrow[d, "\alpha"] \\
(Q, \mu)
\end{tikzcd}$$

射の合成 元の圏の射の合成からそのまま定義できる。

Optic の圏と丹原加群

丹原加群は $\mathbb{Optic}$ から $\mathbb{Set}$ への準同型写像と対応する。

この対応は既存の文献において次の定理で知られているが、証明は行間が広いため定理の厳密化を行なった。

Theorem (丹原 Double 圏同値)

$$\mathbb{Tamb} \simeq [\mathbb{Optic}, \mathbb{Set}]$$

$\simeq$ は圏の同型を緩めた等価性とし、$[\mathbb{Optic}, \mathbb{Set}]$ は $\mathbb{Optic}$ から $\mathbb{Set}$ への準同型写像の成す圏である。

プロファンクターオプティクス

最後に最終目標であるプロファンクターの表現定理を紹介する。

Theorem (プロファンクターの表現定理)

$$\mathbb{Optic}(A, A', S, S') \cong \int_P [P(A, A'), P(S, S')]$$

ただし P は任意の丹原加群とする。

本来 P は丹原加群ではなく、$\mathbb{Optic}$ から $\mathbb{Set}$ の準同型写像であるが、前スライドの丹原 Double 圏同値によって丹原加群とみなせる。

また左辺のような形で表した Optic をプロファンクターオプティクスと呼び、実用ではこちらを用いることが多い。

まとめ

- Lens と Prism を定義し、それらが Optic の一例であることを示した。
- 丹原加群を定義し、丹原 Double 圏同値による Optic との関係を示した。
- 丹原 Double 圏同値の応用として、プロファンクターの表現定理を示した。

また具体的な成果として、丹原 Double 圏同値の定理の厳密化を行なった。

今後の課題

- 2-圏論に関する体系的な知識を身につける。
- 2-圏論を用いて丹原 Double 圏同値の一貫した証明を示す。
- 丹原 Double 圏同値の一般化と思われる定理が 2-圏論に存在するため、それとの関係を明らかにする。